

Chapitre 5 :

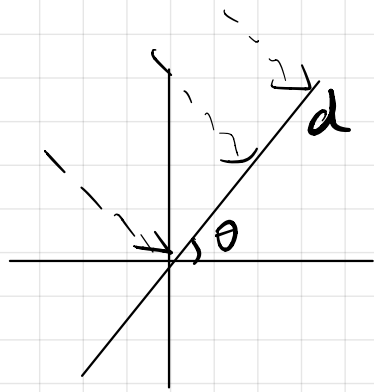
COURS 9.2

14.11.24

Valeurs propres & diagonalisation

§ 5.1 : Valeurs propres

Motivation: soît π la projection orthogonale sur d vue précédemment



on a trouvé

$$[\pi]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = A_{\pi} = \text{la matrice canoniquement associée à } \pi$$

Pour trouver $[\pi]_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$

$\mathcal{E}$ = base canonique de $\mathbb{R}^2$

on avait utilisé $\star$

$$[\pi]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} \cdot [\pi]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \cdot P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}$$

où $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ base "habilement" choisie

ici on avait $\pi(\vec{b}_1) = \vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{b}_1$ $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$
vecteur fixe pour π

et

$$\pi(\vec{b}_2) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{b}_2 \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Plus général, on s'intéresse

$$\text{aux vecteurs } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \pi(\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{v}$$

$$\text{avec } \underline{\lambda \in \mathbb{R}}$$

Déf. 5.1.1 (super importante)

Soit V un espace vectoriel

et $T: V \rightarrow V$ une transt. linéaire
(de V dans lui-même)

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit

$$E_\lambda \stackrel{\text{dét}}{=} \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} \quad \checkmark \text{ est toujours un S.E.V de } V$$

On dit que λ est valeur propre de T

si $E_\lambda \neq \{0_V\}$, c-à-d s'il existe $v \neq 0_V$

tel que $T(v) = \lambda v$.

(et donc T "se comporte" comme
- une homothétie de rapport λ (si $\lambda \neq 0$)
- une projection si $\lambda = 0$)

Dans le cas où $E_\lambda \neq \{0_V\}$ on dira

que E_λ est l'espace propre associé à λ
(pour la transfo linéaire T)

et tout vecteur

$$v \in E_\lambda - \{0_V\}$$

s'appelle un vecteur propre associé à λ
(de T)

(vecteur propre = eigenvector)
(valeur propre = eigenvalue)
(espace propre = eigenspace)

Déf 5.1.2 : Pour $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

on parle de valeur propre de A

vecteur $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$

espace $\parallel$ $\parallel$ $\parallel$

pour les mêmes concepts associés à

$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

Premiers exemples 5.1.3 (avec n petit)

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v$$

$\Rightarrow v$ est vect. propre associé à la val. propre 2

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4v$$

A se comporte comme

une homothétie de rapport -4

le long de la droite $\text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

voyons que 7 est val. propre de A aussi :

il existe donc $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tq $Av = 7v$

cherchons-le :

$$\exists v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t.q$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

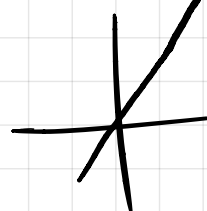
$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$\text{Donc } E_7 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_1 = v_2 \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ c'est la droite } \rightarrow$$



Astuce 5.1.4 (valable dans certains cas très très particuliers)

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Supposons que la somme de chaque ligne de A donne la même valeur λ ,

alors λ est val. propre de A

et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ

En effet, la somme de la i ème ligne est donnée par (pour i fixé)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \lambda \in \mathbb{R}$$

dès lors

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{pmatrix}$$

par hyp. $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

ex: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ possède 0 comme val propre

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vect. propre associé

Comment trouver les val propres?

Proposition 5.1.4: $T: V \rightarrow V$ transfo. lin. $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors E_λ est le noyau d'une transfo. lin.
Plus précisément

$$E_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

$$\text{Id}_V: V \rightarrow V \\ v \mapsto v$$

$$= \{v \in V \mid T(v) - \lambda v = 0_V\}$$

$$= \{v \in V \mid T(v) - \lambda \text{Id}_V(v) = 0_V\}$$

$$= \{v \in V \mid (T - \lambda \text{Id}_V)(v) = 0_V\}$$

$$= \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_V)$$

et donc E_λ est un s.e.v de V .

Prop. 5.1.5 : Pour $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ on a

$$E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$$

ou plus général. si $T: V \rightarrow V$ et B une base de V

$$\text{alors } E_\lambda = \text{Ker}([T]_{BB} - \lambda [Id_V]_{BB})$$

$$\text{or } [Id_V]_{BB} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} [b_1]_B & [b_2]_B & \cdots & [b_n]_B \\ \hline \end{array} \right)$$

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

$$Id_V(b_1) = b_1$$

$$Id_V(b_n) = b_n$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

$$\left(\begin{array}{l} b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \cdots + 0 \cdot b_n \\ [b_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

Ex généraux 5.16. Soit V un espace vectoriel
 $V \neq \{0\}$

1) $T = \text{Id}_V : V \rightarrow V$
 $v \mapsto v = 1 \cdot v$

• val. propres : $\lambda = 1$ et c'est la seule

• vecteurs propres : $V \setminus \{0_V\}$

• $E_1 = \text{Ker}(\text{Id}_V - 1 \cdot \text{Id}_V) = \text{Ker}(0) = V$
l'espace propre

2) $T : V \rightarrow V$
 $v \mapsto 0_V$

• val. propres : $\lambda = 0$ seule val. propre

• vect. propres : $V \setminus \{0_V\}$

• $E_0 = \text{Ker}(T - 0 \cdot \text{Id}_V) = \text{Ker}(0) = V$
 $\uparrow$
 0

3) Soit $T : V \rightarrow V$ t.l. Quand est-ce que
 0 est val propre de T ?

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \{v \in V \mid T(v) = \underbrace{0 \cdot v}_{=0_v}\} \\
 &= \{v \in V \mid T(v) = 0_v\} \\
 &= \text{Ker}(T)
 \end{aligned}$$

Donc 0 est valeur propre

$\Leftrightarrow$ il existe $v \neq 0_v$ t.q. $v \in E_0$

$\Leftrightarrow E_0 \neq \{0_v\}$

$\Leftrightarrow \text{Ker}(T) \neq \{0_v\}$

$\Leftrightarrow T$ n'est pas injective
 $\underbrace{\quad}_{(T \text{ lin.})}$

(plus d'exemples après).

Théorème 5.1.7 (Brave Théorème)

$V \neq \{0\}$ un esp. vect. (de dim. finie)

et $T: V \rightarrow V$ transfo lin.

et $B = (b_1, \dots, b_n)$ base ord. de V
($\dim(V) = n$)

soit $A = [T]_{BB} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Alors on a

1) λ est val. propre de $T \Leftrightarrow \lambda$ v.p. de A

2) $v \in V$ est vect. propre de T associé à $\lambda \Leftrightarrow [v]_B$ est vect. propre de A associé à λ
($[v]_B \in \mathbb{R}^n$)

3) $T(v) = \lambda v \Leftrightarrow A \cdot [v]_B = \lambda \cdot [v]_B$

$\Updownarrow$
 $T(v) - \lambda v = 0_V \Leftrightarrow A \cdot [v]_B - \lambda [v]_B = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\Updownarrow$
 $v \in \text{Ker}(T - \lambda \text{Id}_V) \Leftrightarrow [v]_B \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$

Donc $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de T (ou de A)

$\Leftrightarrow$ le système homogène

$$(A - \lambda I_n) x = 0$$

possède au moins une solution non nulle

$\Leftrightarrow$ la matrice carrée $A - \lambda I_n$
n'est pas inversible (car non injective)

$$\Leftrightarrow \boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{l'équation} \\ \text{caractéristique} \\ \text{de } A \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(A - \lambda I_n))}_{\operatorname{rg}(A - \lambda I_n)} < n$$

(donc $A - \lambda I_n$ possède moins que n pivots)

4) Si $A = [T]_{BB}$ est diagonale

alors les val. propres
se lisent sur la diagonale

(eg. $\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{4} \end{pmatrix}$)

et T possède n vecteurs
propres linéairement indépendants
sont $B = (b_1, \dots, b_n)$

càd V possède une base formée de
vecteurs propres de T .

4^t) Si $A = [T]_{BB}$ est triangulaire (sup ou inf)

alors les val. propres de T

sont les coeff diagonaux $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1, -3, 4 sont val. propres.

mais les vect. propres pour -3 et 4
sont plus difficiles à trouver

5) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ ($1 \leq r \leq n$)

des val. propres de T distinctes 2 à 2.

et si $v_1, \dots, v_r \in V$ sont des vect. propres

associés à λ_i (càd $v_i \in E_{\lambda_i} - \{0\}$)

alors $\{v_1, \dots, v_r\}$ est linéairement
indépendant

6) si $v \in E_\lambda - \{0\}$ et si $r \in \mathbb{N}$ ($r \geq 1$)

$$\text{alors } T^r(v) = T^{r-1}(T(v)) = T^{r-1}(\lambda v)$$

$$= \lambda T^{r-1}(v) = \dots =$$

$$T^r(v) = \lambda^r v$$

Donc, si v est vect. propre de T associé à λ

alors, v est vect. propre de T^r associé à λ^r

$$\left(\begin{array}{l} \text{ex: } A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 7 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v \text{ est vect. propre de } A^{1000} \\ \text{associé à la val. propre } 7^{1000} \end{array} \right)$$

(Fin du Brave Thm)

Def. 5.18 (Diagonalisabilité)

On dit que $T: V \rightarrow V$ est diagonalisable
linéaire

1) s'il existe une base B de V telle que

$[T]_{BB}$ est une matrice diagonale

2) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est dite diagonalisable

s' $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est diagonalisable